

UNIVERSIDADE FEDERAL DO SUL E SUDESTE DO PARÁ
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E ENGENHARIAS
Faculdade de Computação e Engenharia Elétrica
Bacharelado em Engenharia Elétrica

Trabalho de Conclusão de Curso

SISTEMA DINÂMICO E CAOS NO CIRCUITO DE CHUA

Wesley da Silva Oliveira

Marabá-PA

2021

Wesley da Silva Oliveira

SISTEMA DINÂMICO E CAOS NO CIRCUITO DE CHUA

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado à Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará, como parte dos requisitos necessários para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Elétrica.

Orientador:

Prof. Dr. Nadson Welkson Pereira de Sousa

Marabá-PA

2021

Wesley da Silva Oliveira

SISTEMA DINÂMICO E CAOS NO CIRCUITO DE CHUA

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado à Universidade Federal do Sul e Sudeste do Pará, como parte dos requisitos necessários para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Elétrica.

Marabá: 29 de Abril de 2021

BANCA QUALIFICADORA:

Prof. Dr. Nadson Welkson Pereira de Sousa
(Orientador - FACEEL/UNIFESSPA)

Prof. Me. Pedro Batista Fernandes
(Membro da Banca - FACEEL/UNIFESSPA)

Prof. Dr. Diego de Azevedo Gomes
(Membro da Banca - FACEEL/UNIFESSPA)

Prof^a.Dra. Franciane Silva de Azevedo
(Membro da Banca - FACEEL/UNIFESSPA)

Marabá-PA
2021

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus pela oportunidade, saúde, capacidade, pelas pessoas que colocou ao meu lado e por tudo que me permitiu viver até o momento.

Aos meus Pais, pelo amor, compreensão e apoio que me deram ao trabalharem e se sacrificarem junto comigo para que eu pudesse alcançar esse objetivo.

As minhas irmãs, Weslane e Welizama, pelo apoio e amor que me dão.

A professora Dra. Franciane Silva de Azevedo pela confiança em ter me convidado para o projeto de pesquisa que culminou neste trabalho. Ao professor Nadson Welkson Pereira de Sousa por ter aceito me orientar em tcc II e me ajudado neste desafio, também ao professor Fernando Coutinho, que me ajudou bastante no período da pesquisa. Agradeço também a todos os demais professores dos quais fui aprendiz.

Agradeço aos meus colegas de Turma, Elias dos Santos Sales, José Vinícius, Ramon Farias, Jean Charles, Jozivan e Jair Kleber, pela amizade e companheirismo que demonstraram durante nossa convivência, principalmente o Jean e Jair, companheiros com os quais sempre podia contar, também aos colegas com os quais dividir moradia, Jordelson e Gerson. Aos demais colegas que apesar de não citados, mas que contribuíram na minha formação, meu muito obrigado.

Por último e não menos importante aos demais amigos e familiares que direta e indiretamente me incentivaram e me apoiaram nesta jornada.

*”De tudo o que se tem ouvido, a suma
é: Teme a Deus e guarda os seus
mandamentos; porque isto é o dever
de todo homem.”*

(Eclesiastes 12:13)

RESUMO

O circuito caótico de Chua é um dispositivo eletrônico composto por capacitores, resistores, um indutor e pelo diodo de Chua, um componente não linear ativo responsável por viabilizar o aparecimento do comportamento caótico. Um sistema caótico é definido por possuir elevada sensibilidade às condições iniciais, assim, dado pequenas incertezas na determinação destas condições o sistema torna-se imprevisível. Neste trabalho é apresentado a caracterização deste circuito, foram realizadas análises no domínio do tempo e no espaço de fase. Os atratores, os expoentes de Lyapunov e o mapa de Poincaré do sistema, comumente estudadas em sistemas caóticos, foram os principais alvos desta análise. O objetivo é apresentar modelos de análise de sistemas dinâmicos não lineares na procura de comportamento caótico e apresentar o comportamento caótico no circuito de Chua, tanto no modelo teórico como no experimental. Os resultados demonstraram as principais características que definem o comportamento caótico através do circuito de Chua.

Palavras-chave: Sistemas dinâmicos, Comportamento caótico e Circuito de Chua.

ABSTRACT

The Chua's Chaotic Circuit is an electronic device composed by capacitors, resistors, an inductor and Chua's diode; it is also an active non-linear component responsible to enable the appearance of the chaotic behavior. A chaotic system is defined by having high sensitivity to initial conditions, this way; given small uncertainties in this determination of these conditions, the system becomes unpredictable. In this work it is presented the characterization of this circuit, analyzes had been performed in the domain of time and space phase. The attractors, Lyapunov exponentes and the Poincaré maps of the system, that they were all studied in the chaotic systems, were the main targets of this analysis. The goal is to present models of analysis of non-linear dynamic systems in the search of chaotic behavior and present the chaotic behavior in Chua's Circuit, both in the theoretical and in the experimental model. The results demonstrate the main characteristics that define the chaotic behavior through Chua's Circuit.

Keywords: Dynamic Systems, chaotic behavior and Chua's Circuit.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Propriedade de superposição	13
Figura 2 – Espectro de frequência de um sinal não-periódico	17
Figura 3 – Espectro de frequência de um sinal periódico	18
Figura 4 – Seção de Poincaré	19
Figura 5 – Esquema do Circuito de Chua	20
Figura 6 – Esquema elétrico do diodo de Chua	20
Figura 7 – Modelo geral de amplificadores operacionais ($+V_{CC}$ e $-V_{EE}$ são tensões de alimentação do ampop, V_0 tensão de saída, $V1$ entrada inversora e $V2$ entrada não inversora)	21
Figura 8 – Curva de saturação de um amplificador operacional (v_d a diferença entre $V1$ e $V2$).	21
Figura 9 – Curva $I(V_1)$ do Circuito de Chua	24
Figura 10 – Indutor eletrônico	33
Figura 11 – Circuito de Chua na <i>Protoboard</i>	34
Figura 12 – Fonte simétrica	34
Figura 13 – PCI com o circuito de Chua	35
Figura 14 – Esquema do circuito de Chua com fonte e com o indutor eletrônico. . .	35
Figura 15 – esquema do circuito de compressão e deslocamento do sinal	36
Figura 16 – Comportamento do sistema no espaço de fase com a variação de α , plano x vs y	37
Figura 17 – Comportamento do sistema no espaço de fase com a variação de α , plano x vs t	39
Figura 18 – Comportamento do sistema no domínio do tempo para condições caóticas - $R = 1600$, $x_i=0.7$, $y_i=0$ e $z_i=0$	39
Figura 19 – Espectro de potência com a variação de α , gráficos de $ Fq(x) $ v.s $Fq(x)$, onde $Fq(x)$ é a frequência de x	40
Figura 20 – Comportamento do sistema no domínio do tempo para condições caóticas com x_i diferente, sendo a amplitude a variável x	41
Figura 21 – Mapa de Poincaré para α igual a 12, em a , e igual a 14.6, em b . . .	41
Figura 22 – Comportamento do sistema observado pelo osciloscópio para quando não há comportamento caótico.	42
Figura 23 – Comportamento do sistema observado pelo osciloscópio para quando há comportamento caótico.	42

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Características dos atratores para fluxo tridimensional	16
Tabela 2 – Componentes do Circuito de Chua	32
Tabela 3 – Componentes do Circuito do Indutor eletrônico	32

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
1.1	Motivação	11
1.2	Objetivo Geral	11
1.3	Objetivos Específicos	11
1.4	Organização do Trabalho	11
2	METODOLOGIA	12
2.1	Fundamentação Teórica	12
2.1.1	Classificação de Sistemas	12
2.1.2	Equações diferenciais	14
2.1.3	Características de sistemas com comportamento Caótico	15
2.1.3.1	Expoente de Lyapunov	16
2.1.3.2	Espectro de frequência	17
2.1.3.3	Espaço de Fase e Atrator	18
2.1.3.4	Seção de Poincaré	18
2.2	Modelo do circuito de Chua	19
2.3	Implementações numéricas para análise do sistema	26
2.4	Protótipo	32
3	ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	37
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	43
5	REFERÊNCIAS	44

1 INTRODUÇÃO

Um dos anseios da ciência clássica é prever acontecimentos futuros com maior precisão possível, pois a partir desta previsão pode-se tomar decisões com maior tranquilidade e confiança (VALERIO, 2014). Até meados do século XIX, acreditava-se que este anseio poderia ser alcançado a partir da modelagem matemática na formulação de leis determinísticas que governassem o comportamento dos fenômenos naturais. A partir destas leis poder-se-ia prever o futuro, partindo de um ponto no qual eram conhecidas as condições do fenômeno (LAPLACE, 1814), acreditava-se que se houvesse pequenos erros nas condições conhecidas do fenômeno, chamada de condições iniciais, ou pequenas interferências externas, isto não afetaria significativamente o resultado final. O que justificava os esforços em realizar a modelagem por equações lineares.

Porém, no fim do século XIX, o matemático Jules Henri Poincaré (1854-1912) foi convidado a responder sobre a estabilidade do sistema solar. Então, partindo do estudo do problema dos três corpos celestes, que vinha sendo estudado por muitos físicos e matemáticos, ele escolheu realizar análises qualitativas ao invés de quantitativas. Para isso, utilizou técnicas geométricas e topológicas concluindo que o problema era insolúvel por meios analíticos devido a impossibilidade de se encontrar fórmulas exatas para descrever o movimento dos corpos. Após alguns anos desta conclusão escreveu que “pode acontecer que pequenas diferenças nas condições iniciais produzam grandes diferenças no fenômeno final. Um pequeno erro na entrada produzirá um erro enorme na saída. Previsão torna-se impossível” (POINCARÉ, 1908). Dado a complexidade deste problema, Poincaré não respondeu de forma exata a pergunta, porém contribuiu com técnicas inovadoras de análise em sistemas de equações diferenciais (MONTEIRO, 2006).

Em 1955, no MIT (Instituto de Tecnologia de Massachusetts), Eduart Norton Lorenz (1917-2008), a partir de estudos da dinâmica da atmosfera, com objetivo na previsão estatística do tempo, chegou a mesma conclusão de Poincaré (GLEICK, 1989), desde então foram observados vários sistemas naturais com características não lineares e hipersensibilidade às condições iniciais, o que, conforme evidenciado por Poincaré, torna a previsão impossível. Segundo Martins (2015), durante muitos anos não se sabia se o caos, imprevisibilidade em sistemas determinísticos, representava realmente um comportamento dinâmico em sistemas físicos reais ou era apenas materialização de erros de aproximação nos cálculos numéricos das equações. Então, em 1984, Dr. Leon Ong Chua (1936 -), concebeu um circuito eletrônico simples capaz de apresentar comportamento caótico. O objetivo de Chua era refutar a ideia de que o fenômeno do caos era apenas uma abstração matemática. Então, a partir das características de sistemas com comportamento caótico como o de Lorenz, Chua montou o circuito hoje conhecido pelo seu nome, circuito de Chua (PREBIANCA, 2014) e que será objeto de estudo deste trabalho.

1.1 Motivação

Sistemas não lineares estão presentes em vários fenômenos, sejam eles naturais ou artificiais, em razão disto são estudados por cientistas e pesquisadores de diversas áreas do conhecimento, são exemplos os físicos, matemáticos, biólogos, engenheiros, sociólogos, economistas e etc (VALERIO, 2014). Na área de engenharia existem trabalhos aplicando sistemas caóticos no estudo de criptografia de mensagens (MULUKUTLA, 2002), no projeto de sistemas de controle de motores de indução (CHAU;WANG, 2011), na modelagem de fornos elétricos (SOUSA, 2005), em Controle de Processos, Processamento de Informações, Eletrônica, Robótica, Computação, Química, Medicina, Epidemiologia e Finanças (apud ANDRUCIOLO, 2008). Por sua vez, o circuito de Chua, objeto de estudo deste trabalho, é um dos modelos da dinâmica caótica mais estudados pelos pesquisadores por ser um circuito simples e com variedade de comportamento dinâmico, podendo apresentar atratores pontuais, estranhos e órbitas periódicas (PREBIANCA, 2014).

1.2 Objetivo Geral

Realizar a caracterização do circuito de Chua para identificá-lo como sistema dinâmico determinístico com comportamento caótico;

1.3 Objetivos Específicos

- Apresentar técnicas de análise de sistemas dinâmicos não lineares com comportamento caótico;
- Realizar análise do sistema de equações que regem o comportamento do circuito de Chua para verificar a existência do comportamento caótico;
- Montar o circuito de Chua;
- Comparar resultados teóricos com os experimentais.

1.4 Organização do Trabalho

Além do presente capítulo, que mostrou um breve contexto histórico, principais objetivos e a motivação, estruturou-se este trabalho com mais três capítulos.

O capítulo 2 apresentando a metodologia empregada para a realização do trabalho, que está subdividida em fundamentação teórica, modelagem matemática do circuito de Chua, análise numérica e montagem do protótipo.

O capítulo 3 abordando os resultados e discussões.

E por fim, o capítulo 4 que apresenta a conclusão do trabalho.

2 METODOLOGIA

2.1 Fundamentação Teórica

Nesta seção será apresentado os conceitos que fundamentam este trabalho e citações de trabalhos correlatos.

2.1.1 Classificação de Sistemas

Sistema é uma entidade que manipula um ou mais sinais para realizar uma função (HAYKIN, 2001), para Aguirre (apud Honório, 2010), é um conjunto de componentes (físicos, biológicos, mecânicos, etc.) que interagem de forma definida podendo ser dinâmico ou estático, linear ou não linear. Os sistemas dinâmicos classificam-se em discretos, contínuos, lineares ou não lineares (MONTEIRO, 2019).

Os sistemas estáticos têm sua saída dependente apenas de entradas atuais, por exemplo, a corrente que flui por um resistor possui dependência apenas da tensão instantânea aplicada sobre ele, o que caracteriza um sistema estático. Na equação (1) é apresentada a função que relaciona corrente e tensão em um resistor. Por ela, pode-se notar que o valor da corrente $i(t)$ depende da tensão $v(t)$ apenas para o instante τ .

$$i(\tau) = \frac{v(\tau)}{R} \quad (1)$$

R é a resistência, $v(\tau)$ e $i(\tau)$ são respectivamente tensão e corrente no instante $t = \tau$.

Os sistemas dinâmicos têm sua saída dependente de entradas atuais e passadas (CORRÊIA, 1997). Um exemplo é o valor da corrente elétrica que flui por um indutor, esta depende dos valores da tensão que foram aplicados sobre ele em instantes passados e no presente, por isso o cálculo da corrente nele se dá por uma integral definida, ou seja, em um indutor a corrente é proporcional à soma dos valores de tensões passadas até o instante atual ou qualquer outro instante desejado. Como mostra a equação (2);

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{\tau} v(t) dt \quad (2)$$

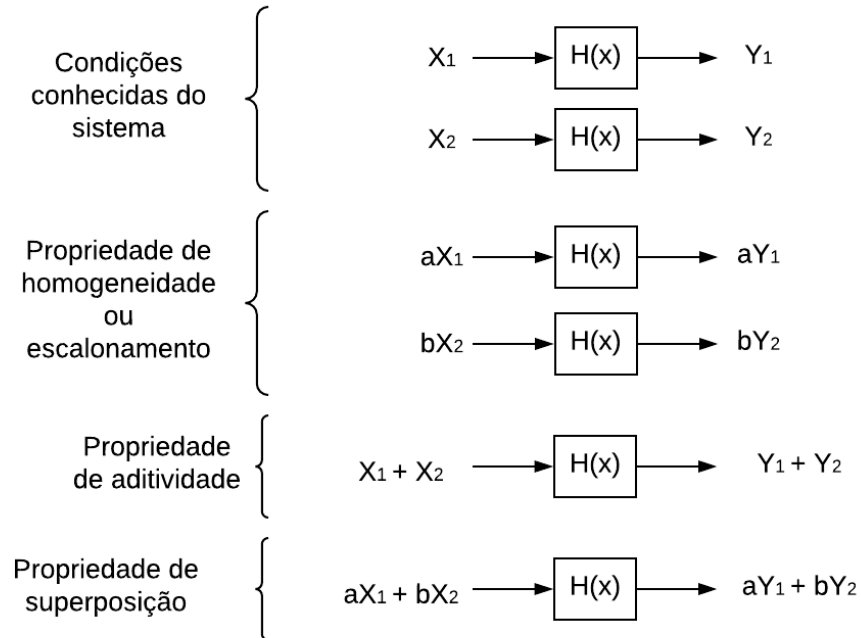
onde, L é a indutância, $i(t)$ é a corrente, $v(t)$ é a tensão e τ é o instante para o qual se quer conhecer o valor da corrente.

Sistemas também podem ser caracterizados por: sistemas sem memória, os estáticos; e os sistemas com memória, os dinâmicos, respectivamente representados nos exemplos do resistor e indutor, equações (1) e (2).

Os sistemas lineares são os que satisfazem a propriedade de superposição, ao se dar uma soma ponderada de entradas a resposta será a soma ponderada das saídas. Na Figura

1 é apresentado esta propriedade que é uma composição das propriedades de aditividade e homogeneidade (LATHI, 2007).

Figura 1 – Propriedade de superposição



Fonte – Lathi.B.P (Adptado)

A propriedade de homogeneidade ou escalonamento é satisfeita quando um sistema que tem resposta Y_1 para uma entrada X_1 e uma resposta Y_2 para uma entrada X_2 , conforme é apresentado na Figura 1, passa a ter um ganho na entrada no valor de a para a entrada X_1 e b para a entrada X_2 e o resultado disto é que Y_1 e Y_2 são também intensificadas com o mesmo ganho, ou seja, para aX_1 a resposta será aY_1 e para bX_2 a resposta será bY_2 . Neste caso a propriedade de homogeneidade está satisfeita.

A propriedade de aditividade é satisfeita quando a soma de entradas resulta na soma das respostas de cada entrada, isto é, a entrada X_1 e entrada X_2 resultam respectivamente em Y_1 e Y_2 , conforme apresentado na Figura 1, e se adicionarmos na entrada a soma de $X_1 + X_2$ o resultado na saída será $Y_1 + Y_2$, ou seja, a soma das entradas para um sistema que atenda a propriedade de aditividade resultará na soma das respostas de cada entrada.

Os que não satisfazem a estas propriedades apresentadas na Figura 1 são classificados como não lineares, sendo este o tipo de sistema que pode apresentar comportamento caótico.

Quanto à classificação de um sistema em tempo discreto ou contínuo, a diferença entre eles é o modo como o tempo evolui, pois nos discretos a evolução do tempo se

dá apenas em instantes discretos de tempo $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$, representados pelos símbolos $x[t_n], y[t_n]$ e assim por diante, onde n é algum inteiro (LATHI, 2007). Um exemplo deste tipo de equação é apresentado na equação (3), um sistema de média móvel (HANKIN, 2001).

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n - 1] + x[n - 2]) \quad (3)$$

onde a função $y[n]$ amostrada depende das amostras atuais e passadas, sendo $x[n]$ a amostra atual e $x[n - 1]$ e $x[n - 2]$ as amostras passadas.

Nos sistemas de tempo contínuo a evolução do tempo ocorre em uma faixa de valores contínua de tempo são sinais contínuos no tempo, representados pelos símbolos $x(t), y(t)$ e assim por diante. Este tipo de sistemas são modelados por equações diferenciais.

Uma outra forma de classificar os sistemas dinâmicos é pelo tipo de relação que há entre o valor para um dado instante e os demais valores imediatamente antes e depois dele. Quando essa relação apresenta algum tipo de dependência esse sistema é classificado como determinístico, no caso contrário, quando não há nenhuma relação de dependência, classifica-se como estocástico (FERREIRA, 2010).

2.1.2 Equações diferenciais

Equações diferenciais são classificadas em lineares ou não lineares. Conforme Zill e Cullen (2001), as equações lineares podem ser escritas da seguinte forma:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x) \quad (4)$$

tendo que satisfazer as seguintes condições:

1. A variável dependente y e suas derivadas são do primeiro grau, de ordem um;
2. Cada coeficiente depende apenas da variável independente x .

Se alguma dessas condições não for satisfeita a equação é não linear.

Uma característica das equações diferenciais é que quando solucionadas analiticamente encontra-se soluções gerais, e a partir das condições iniciais define-se as soluções particulares. A quantidade de condições iniciais necessárias para se encontrar a solução particular de uma equação será determinada pela ordem da equação, isto é, a ordem da maior derivada. Assim, para uma equação diferencial com derivada de maior ordem igual a três, necessita-se de três condições iniciais para se chegar a uma solução particular.

Cabe salientar que equações não lineares são geralmente difíceis de serem resolvidas em termos de funções elementares. Em nível prático, solução geral é aplicada apenas a

equações lineares. O que se utiliza para as não lineares é a solução numérica, já partindo de um caso particular. Neste trabalho utiliza-se como método numérico o de Runge-kutta de quarta ordem, que é classificado como um dos métodos mais precisos para se obter soluções aproximadas de equações diferenciais (ZILL;CULLEN, 2001).

Quando se tem uma equação diferencial linear de ordem superior igual a n , pode-se escrevê-la como um conjunto de n equações diferenciais lineares de primeira ordem.

Por exemplo, dado a seguinte equação de terceira ordem:

$$x''' + 3x'' + 2x' - 5x = \text{sen}(2t) \quad (5)$$

realizando as seguintes igualdades,

$$x_1 = x, \quad x_2 = x' \quad \text{e} \quad x_3 = x'' \quad (6)$$

Logo,

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = x_3 \quad \text{e} \quad x_3' = x''' \quad (7)$$

Então,

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = \text{sen}(2t) + 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 \end{cases} \quad (8)$$

o que facilita o tratamento do sistema a partir de álgebra matricial.

Outro tipo de equação que frequentemente aparece em sistemas dinâmicos são as equações autônomas que são equações que não possuem dependência explícita do tempo.

Equações não autônomas podem ser convertidas para um modelo equivalente para que seja autônoma, bastando que a variável t seja substituída por uma outra, z por exemplo, aumentando assim a dimensão do sistema. Este tratamento é aplicável para sistemas que têm sua evolução dependente apenas da variação do tempo, Δt , e não do tempo propriamente dito, t .

2.1.3 Características de sistemas com comportamento Caótico

Os sistemas que apresentam comportamento caótico possuem no mínimo três graus de liberdade, são não-periódicos, possuem sensibilidade às condições iniciais e apresentam atrator estranho no espaço de fase (PREBIANCA, 2010). Os sistemas discretos são uma exceção para o grau de liberdade¹ mínimo, pois podem apresentar comportamento caótico

¹Grau de liberdade é a quantidade mínima de pares de coordenadas para determinar a evolução de um sistema, por exemplo, para determinar a trajetória de uma formiga em um quadro necessita-se apenas de um par de coordenadas, ou seja, um sistema com um grau de liberdade.

com apenas um grau de liberdade, um exemplo é o mapa logístico que apresenta caos com apenas um grau de liberdade (BAPTISTA, 1996).

Neste trabalho, a caracterização do sistema caótico do circuito de Chua será realizada a partir da análise do comportamento temporal, do espaço de fase, da seção de Poincaré e do espectro de frequência, análises estas geralmente encontradas na literatura sobre sistemas dinâmicos.

2.1.3.1 Expoente de Lyapunov

O cálculo do expoente de Lyapunov é uma forma de qualificar a caoticidade do sistema, sendo definido como a taxa de expansão ou contração entre duas trajetórias que iniciam infinitamente próximas uma da outra (PREBIANCA, 2014), em outras palavras, ele quantifica a sensibilidade às condições iniciais. Então, sistemas com comportamento caótico apresentam em pelo menos uma dimensão o expoente de Lyapunov positivo, significando divergência entre trajetórias. A soma dos expoentes de Lyapunov de um sistema deve apresentar resultado negativo, pois esse resultado é uma característica de sistemas dissipativos, uma condição necessária para a existência de atratores (FERRARA;PRADO, 1994).

O cálculo do expoente de Lyapunov pode ser feito da seguinte forma:

Dado o eixo coordenado j , que no caso tridimensional pode ser x , y ou z , considere-se que o raio inicial $d_j(t_0)$, pequena diferença na posição entre dois pontos de partida, tenha uma variação exponencial no tempo, logo o valor do raio para o tempo t , $d_j(t)$, será:

$$d_j(t) = d_j(t_0)e^{(t-t_0)\lambda_j} \quad (9)$$

Evidenciando λ_j fica,

$$\lambda_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln[d_j(t) \setminus d_j(t_0)]}{t - t_0} \quad (10)$$

λ_j : expoente de Lyapunov para dimensão j .

As conclusões que pode-se chegar com esses valores de λ_j são apresentados na tabela a seguir.

Tabela 1 – Características dos atratores para fluxo tridimensional

λ_1	λ_2	λ_3	Atrator	Dimensão	Dinâmica
-	-	-	ponto de equilíbrio	0	estático
0	-	-	ciclo limite	1	periódico
0	0	-	torus-2	2	quasiperiodicidade
+	0	-	estranho	2 a 3	caótico

Fonte – apud PREBIANCA(2014)

Sendo “-”, um expoente negativo, “+”, um positivo e “0” um nulo.

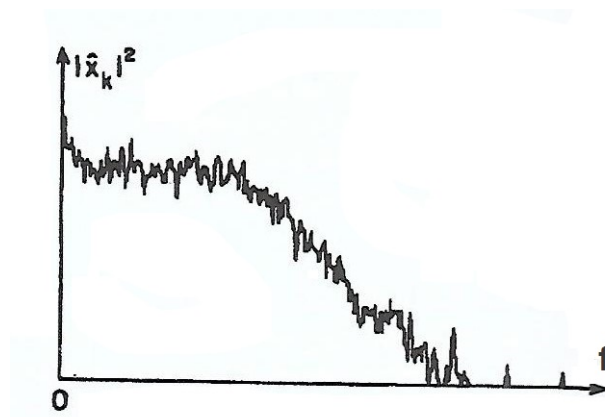
Um sistema tridimensional que apresente expoente de Lyapunov negativo para as três dimensões é um sistema estático com atrator do tipo ponto de equilíbrio e a dimensão do atrator no espaço de fase é igual a zero, assim como é mostrado na tabela 1. O caso que será apresentado neste trabalho é o mostrado na última linha da tabela 1, um sistema tridimensional com expoentes de Lyapunov positivo, nulo e negativo. Esse resultado leva a concluir que o sistema tem atrator estranho, possui dimensão fracionada, entre 2 e 3, e possui uma dinâmica caótica.

2.1.3.2 Espectro de frequência

Sobre a característica de não-periodicidade do sistema caótico, esta pode ser evidenciada pela transformada de Fourier da autocorrelação do sinal, também conhecida como densidade espectral de potência (DEP). Quando o sinal é periódico seu espectro é representado como a combinação linear de oscilações cujas frequências são múltiplos inteiros de uma frequência básica, mas quando o sinal é não-periódico o espectro de frequência varia continuamente (FERRA E PRADO, 1994).

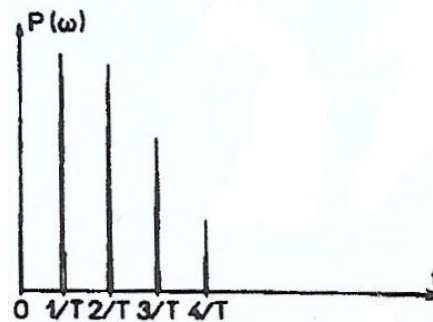
Exemplo de um espectro de frequência de um sinal não-periódico é mostrado na Figura 2 e de um sinal periódico na Figura 3.

Figura 2 – Espectro de frequência de um sinal não-periódico



Fonte – apud FERRARA e PRADO (1994)

Figura 3 – Espectro de frequência de um sinal periódico



Fonte – apud FERRARA e PRADO (1994)

2.1.3.3 Espaço de Fase e Atrator

O espaço de fase, ou espaço de estados, é definido por J. Viana (2010) como um sistema de coordenadas associado às variáveis independentes que descrevem a dinâmica de um sistema, sendo a representação da dinâmica de uma função no espaço de fases chamada atrator. Que é definido por:

“um conjunto de pontos no espaço de estados obtido, pela solução do sistema de equações diferenciais da evolução temporal do sistema ou pelas séries temporais experimentais. Um atrator tem este nome por consistir em um objeto no espaço de estados para o qual as trajetórias convergem no tempo. Um atrator pode ter uma dimensão característica inteira ou fracionária. No caso da dimensão ser fracionária o atrator é dito estranho. Simplificadamente podemos dividir os atratores em três tipos: periódicos, quase periódicos e caóticos, onde os periódicos apresentam-se como ciclos limite no espaço de fase, os quase-periódicos como superfícies toroidais de N dimensões e os caóticos como regiões preenchidas no espaço de fase”(J.VIANA, 2010).

2.1.3.4 Seção de Poincaré

A seção de Poincaré tem por objetivo reduzir a complexidade do sistema, pois analisa o comportamento das trajetórias do espaço de fase de dimensão n em dimensão $n-1$, assim, para o caso de um sistema tridimensional a análise será feita em dimensão dois, um plano. Este plano será perpendicular às trajetórias originadas da evolução do sistema no espaço de fase e, no plano serão marcados pontos no local onde as trajetórias o cruzam, considerando apenas um sentido das trajetórias, formando um conjunto de pontos discretos que refletem as propriedades do sistema.

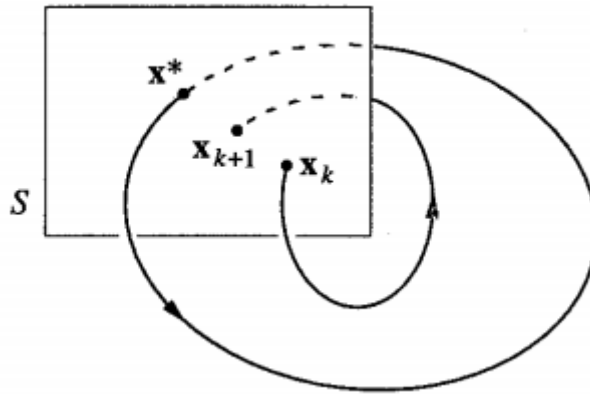
A análise do mapa de Poincaré, conjunto de pontos formado na seção de Poincaré, é realizada a partir das seguintes observações:

- Um ponto na seção de Poincaré é característico de sistemas estacionários;
- Número finito de pontos na seção de Poincaré é característico de sistemas periódicos;

- Grande quantidade de pontos distribuídos irregularmente é característico de sistemas caóticos.

Na Figura 4 é representado como ocorre a obtenção da seção de Poincaré, na qual é obtido os pontos X_k , X_{k+1} e X^* . Sendo S o plano onde é marcado os pontos, ou seja, a seção de Poincaré.

Figura 4 – Seção de Poincaré



Fonte – STROGATZ(2001)

2.2 Modelo do circuito de Chua

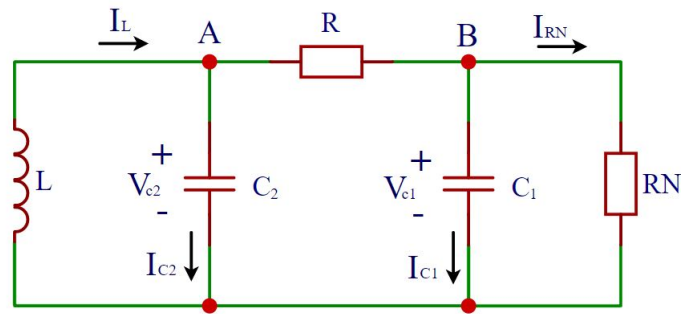
O circuito de Chua, Figura 5, montado com objetivo de provar a existência de caos em sistemas físicos, é composto por dois capacitores (C_1 e C_2), um indutor (L), um resistor variável (R) e um componente ativo não linear por partes (R_N), chamado de Diodo de Chua. Este diodo tem seu esquema elétrico apresentado na Figura 6. Ele é composto por seis resistores (R_1 a R_6) e dois amplificadores operacionais (A_1 e A_2), modelo geral apresentado na Figura 7. A análise deste diodo precisará ser dividida em três partes em razão do modo de funcionamento dos amplificadores, pois cada amplificador pode operar na região linear ou de saturação positiva ou de saturação negativa², como apresentado na Figura 8.

A análise será feita da seguinte forma:

1. A_1 e A_2 trabalhando na região linear;
2. A_1 na região de saturação e A_2 na região linear ou vice versa;
3. A_1 e A_2 na região de saturação.

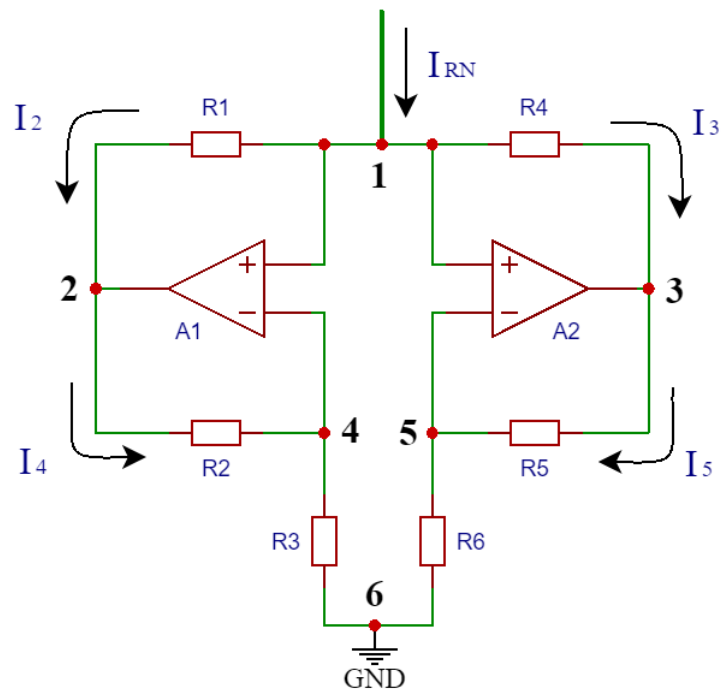
²Região de saturação positiva e negativa de um amplificador operacional é a região que corresponde ao valor máximo e mínimo, respectivamente, de saída. Quando o amplificador está nesta região o aumento da diferença de tensão na entrada ou o aumento do ganho do amplificador não mudará seu valor de saída.

Figura 5 – Esquema do Circuito de Chua



Fonte – Adptado de Valerio, 2014

Figura 6 – Esquema elétrico do diodo de Chua



Fonte – Adptado de Viana, 2010

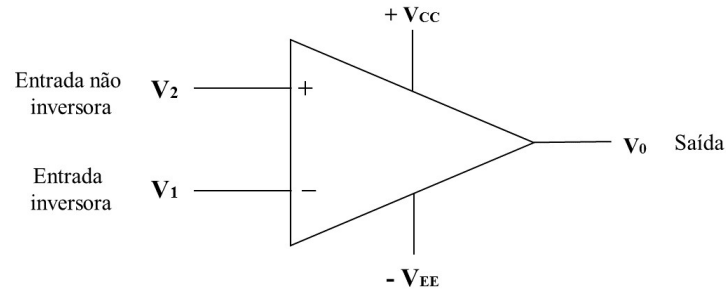
Para o primeiro caso, A_1 e A_2 trabalhando na região linear, os valores da tensão de saída dos amplificadores será menor que a tensão de alimentação deles, como pode ser visto na Figura 8, no qual a região linear tem uma saída, v_d , entre V_{CC} e $-V_{CC}$. Assim, para A_1 , a tensão no nó 4, entrada inversora, estará dentro do seguinte intervalo:

$$-V_{cc} \frac{R_3}{R_3 + R_2} < V_4 < V_{cc} \frac{R_3}{R_3 + R_2} \quad (11)$$

onde V_{cc} é a tensão de alimentação positiva e $-V_{cc}$ ou $-V_{EE}$ a tensão de alimentação negativa, como indicado na Figura 7.

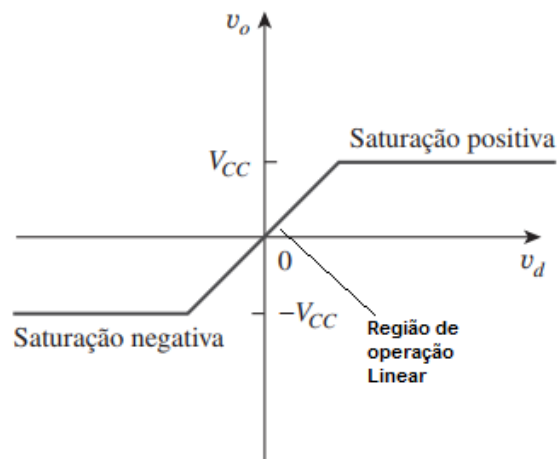
Considerando que a tensão máxima na entrada não inversora, nó 4, seja V_{B1} ,

Figura 7 – Modelo geral de amplificadores operacionais ($+V_{CC}$ e $-V_{EE}$ são tensões de alimentação do ampop, V_0 tensão de saída, V_1 entrada inversora e V_2 entrada não inversora)



Fonte – Adptado do livro: Eletrônica Volume 2, 7º ed, Malvino e Bates (2007)

Figura 8 – Curva de saturação de um amplificador operacional (v_d a diferença entre V_1 e V_2).



Fonte – Adaptada do livro: Fundamentos de Circuitos elétricos, 5 ed, Sadiku e Alexander.

tem-se

$$V_{B1} = V_{cc} \frac{R_3}{R_3 + R_2} \quad (12)$$

e a mínima, de forma análoga a V_{cc} , será $-V_{B1}$.

Para A_2 , a análise será a mesma, resultando em,

$$-V_{cc} \frac{R_5}{R_5 + R_6} < V_5 < V_{cc} \frac{R_5}{R_5 + R_6} \quad (13)$$

sendo a tensão máxima no nó 5 igual a V_{B2} . Então,

$$V_{B2} = V_{cc} \frac{R_5}{R_5 + R_6} \quad (14)$$

e a tensão mínima será igual a $-V_{B2}$.

Logo, para A_1 trabalhar na região linear, V_1 deve estar limitado entre $-V_{B1}$ e V_{B1} . De forma análoga, para A_2 trabalhar na região linear, V_1 deve está limitado entre $-V_{B2}$ e V_{B2} . Sendo V_1 a tensão no nó 1 da Figura 6.

Assumindo $V_{B1} < V_{B2}$, pode-se definir os seguintes regimes de operação:

Regime I: $|V_1| \leq V_{B1} < V_{B2}$, A_1 e A_2 estão na região linear, que resulta em $V_1 = V_4 = V_5$. Podendo ser reescrito em:

$$R_1 I_2 = -R_2 I_4 \quad (15)$$

$$R_4 I_3 = -R_5 I_5 \quad (16)$$

Em razão da alta impedância das entradas despreza-se as correntes nelas, assim, pode-se concluir que:

$$V_4 = R_3 I_4 \quad (17)$$

$$V_5 = R_6 I_5 \quad (18)$$

Isolando I_4 na equação (17) e i_5 na (18), substituindo na equação (15) e na (16), respectivamente. Tem-se:

$$R_1 I_2 = \frac{-R_2 V_1}{R_3} \quad (19)$$

$$R_4 I_3 = \frac{-R_5 V_1}{R_6} \quad (20)$$

Aplicando a lei de Kirchhoff das correntes no nó 1, tem-se:

$$I_{RN} = I_2 + I_3 = -V_1 \left(\frac{R_2}{R_1 R_3} + \frac{R_5}{R_4 R_6} \right) \quad (21)$$

A partir da equação (21) pode-se concluir que para V_1 variando entre $-V_{B1}$ e V_{B1} a corrente no diodo de Chua varia linearmente com a tensão V_1 , com coeficiente angular igual a:

$$m_1 = - \left(\frac{R_2}{R_1 R_3} + \frac{R_5}{R_4 R_6} \right) \quad (22)$$

Regime II: $V_{B1} \leq |V_1| \leq V_{B2}$, Apenas A_1 está saturado, logo, a tensão de saída de A_1 , V_2 , será igual a $-V_{cc}$ ou V_{cc} , quando V_1 for negativa ou positiva, respetivamente.

Para V_1 positivo I_2 será dado por:

$$I_2 = \frac{V_1 - V_2}{R_1} \quad (23)$$

Apesar de A_1 estar na região de saturação, A_2 ainda estará na região linear. Logo I_3 é a mesma do regime I e I_{RN} será dada por:

$$I_{RN} = I_2 + I_3 = \frac{V_1 - V_{cc}}{R_1} - V_1 \frac{R_5}{R_4 R_6} \quad (24)$$

evidenciando V_1 , tem-se:

$$I_{RN} = V_1 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{R_5}{R_4 R_6} \right) - \frac{V_{cc}}{R_1} \quad (25)$$

nesta equação o coeficiente linear é dado por:

$$m_0 = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{R_5}{R_4 R_6} \right) \quad (26)$$

Para V_1 negativo, que resultará em $V_2 = -V_{cc}$, I_{RN} será dado por:

$$I_{RN} = I_2 + I_3 = \frac{V_1 - V_{cc}}{R_1} + V_1 \frac{R_5}{R_4 R_6} \quad (27)$$

evidenciando V_1 , tem-se:

$$I_{RN} = I_2 + I_3 = V_1 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{R_5}{R_4 R_6} \right) + \frac{V_{cc}}{R_1} \quad (28)$$

Na equação (28) o coeficiente angular é o mesmo da equação (25), a diferença destas equações é o coeficiente linear que para uma é $\frac{V_{cc}}{R_1}$ e para outra $-\frac{V_{cc}}{R_1}$.

O coeficiente angular m_0 dever ser negativo, pois os valores dos resistores utilizados impõem essa característica a m_0 , característica esta do diodo de Chua que é um componente com $I(V)$ do tipo NDC (Curva de condutividade negativa), que lhe confere a capacidade de ser um componente ativo no circuito.

Regime III: $V_{B1} < V_{B2} \leq |V_1|$, A_1 e A_2 estão saturados, logo a tensão na saída dos amplificadores, A_1 e A_2 , será igual a tensão máxima, V_{cc} e $-V_{cc}$.

Em A_2 a corrente I_3 será dada pela seguinte relação:

$$I_3 = \frac{V_1 - V_{cc}}{R_4} \quad (29)$$

Em A_1 a corrente I_2 será dada pela relação apresentada na equação 23. Assim, a corrente I_{RN} será dada por:

$$I_{RN} = I_2 + I_3 = (V_1 - V_{cc}) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} \right) \quad (30)$$

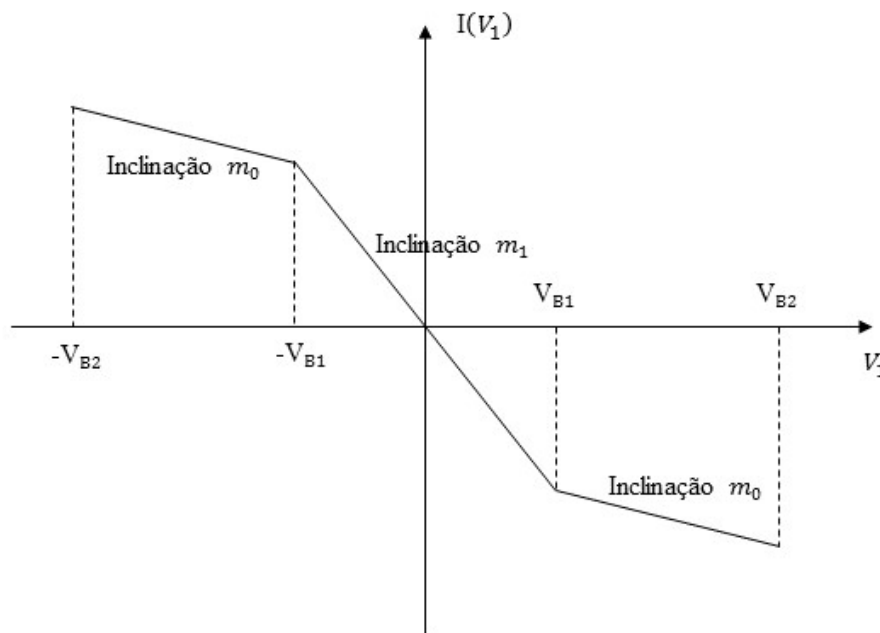
e o coeficiente angular será:

$$m_2 = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_4} \right) \quad (31)$$

A partir da equação (31) observa-se que independentemente dos valores das resistências o valor m_2 permanece positivo, ou seja, para o caso dos dois amplificadores operacionais estarem na região de saturação, a curva $I(V_1)$ do Diodo de Chua não mais se comporta como uma curva NDC (Curva de condutividade negativa³), esse caso apenas será verificado se houver uma fonte externa, viabilizando o valor da tensão $V_1 = V_{cc}$, o que aumenta o número de parâmetros de controle do sistema. Essa abordagem é tratada no trabalho de Viana (2010), que é a referência para os cálculos apresentados nesta seção. Neste trabalho, apenas será considerado as curvas do regime *I* e regime *II*, pois não será utilizado fonte externa. Assim, a tensão V_1 não chegará a ser igual tensão $\pm V_{cc}$ em razão das perdas internas do amplificador operacional.

Segundo o *datasheet* do t1074, amplificador operacional utilizado no projeto, a máxima tensão de saída para uma tensão de alimentação igual a $\pm 14V$ é $\pm 12,5V$, ou seja, neste componente, para a situação em que foi testado, há perdas interna que resultam em queda de tensão em torno de 1,5 V. Então, a curva $I(V_1)$ do diodo de Chua fica conforme apresentado na Figura 9.

Figura 9 – Curva $I(V_1)$ do Circuito de Chua



Fonte – Adptado de Viana, 2010

³Característica de componentes ativos, que são fontes de energia para o circuito (PREBIANCA, 2014).

A curva $I(V_1)$ do diodo de Chua apresentada na Figura 9 é composta por três segmentos lineares de inclinação negativa, a combinação destes seguimentos torna o sistema não linear por partes.

Assim, a corrente $I(V_1)$ é determinada por:

$$i(V_1) = \begin{cases} m_1 V_1 \\ \pm(m_1 - m_0)V_{(B1)} + m_0 V_1 \end{cases} \quad (32)$$

Que pode ser reescrita em:

$$I(V_1) = m_1 V_1 + \frac{1}{2}(m_0 - m_1)(|V_1 + V_{B1}| - |V_1 - V_{B1}|) \quad (33)$$

Essa será a equação utilizada no sistema de equações do circuito de Chua. Sendo V_1 desta equação a mesma variável que V_{c2} , ou seja, $V_1 = V_{c2}$.

A análise do circuito de Chua parte da aplicação das Leis de Kirchhoff, assim aplicando a Lei de Kirchhoff das correntes no nó A do circuito da Figura 5, obtém-se:

$$I_L = \frac{dV_{c2}}{dt} C_2 + \frac{V_{c2} - V_{c1}}{R} \quad (34)$$

Aplicando a mesma análise no nó B, tem-se:

$$I_R = \frac{V_{c2} - V_{c1}}{R} = \frac{dV_{c1}}{dt} C_1 + I(V_1) \quad (35)$$

E para a terceira equação usa-se a lei de Kirchhoff das tensões na malha do indutor, que resulta em:

$$L \frac{dI_L}{dt} + V_{c2} = 0 \quad (36)$$

Isolando as derivadas chega-se no seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \frac{dV_{c2}}{dt} = \frac{I_L}{C_2} - \frac{V_{c2} - V_{c1}}{RC_2} \\ \frac{dV_{c1}}{dt} = -\frac{i(V_1)}{C_1} + \frac{V_{c2} - V_{c1}}{RC_1} \\ \frac{dI_L}{dt} = -\frac{V_{c2}}{L} \end{cases} \quad (37)$$

Esse sistema de equações é reescalado para se reduzir o número de parâmetros envolvidos, porém sem alterar a dinâmica do sistema (MEDRANO e ROCHA, 2008).

As novas variáveis serão:

$$x = \frac{V_{c1}}{V_{B1}}; y = \frac{V_{c2}}{V_{B1}}; z = \frac{RI_L}{V_{B1}} \text{ e } \tau = \frac{t}{RC_2}. \quad (38)$$

Define-se também as seguintes relações:

$$\alpha = \frac{C_2}{C_1}; \beta = \frac{R^2 C_2}{L}; a_0 = Rm_0 \text{ e } a_1 = Rm_1. \quad (39)$$

Realizando as devidas substituições o sistema fica:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = \alpha[-x + y - f(x)]; \\ \frac{dy}{d\tau} = x - y + z; \\ \frac{dz}{d\tau} = -\beta y \end{cases} \quad (40)$$

E a equação do diodo de Chua fica representada por:

$$f(x) = a_1 x + \frac{1}{2}(a_0 - a_1)(|x + 1| - |x - 1|) \quad (41)$$

A equação (41) é apresentada nos trabalhos de Martins(2015), Valério(2014) e Andrucciolo(2008). E atende as condições da Equação (32).

2.3 Implementações numéricas para análise do sistema

Para solução do sistema, equação (40), utilizou-se a função `ode45`, escrita por Dormand-Prince, a função implementa o método de Runge-Kutta de quarta ordem com passo variável. Esta está disponível no GNU Octave, *software* livre sob licença GPL (*General Public License*) para cálculos matemáticos. A implementação desta equação no *software* é apresentado no *Script 1*.

Apenas o cálculo para estimar o expoente de Lyapunov foi realizado no Matlab (*Matrix Laboratory*), com utilização do pacote MATDS, escrito por Vasily N. Govorukhin, para o estudo numérico interativo de sistemas dinâmicos, disponível em <http://www.math.rsu.ru/mexmat/kvm/matds/>, com último acesso realizado em 2019.

Script 1 - Implementação de função definindo o sistema de equações (40):

```
function saida=sist_chua(t,in)
saida=zeros(7,1);
alpha=in(4);
beta=in(5);
a=in(6);
b=in(7);
saida(1)=alpha*(-in(1)+in(2)-(a*in(1)+0.5*(b-a)*(abs(in(1)+1)-abs(in(1)-1))));
saida(2)=in(1)-in(2)+in(3);
saida(3)=-beta*in(2);
```

No *Script 1* é definido que o sistema de equações será uma função chamada de `sist_chua`. Esta função terá como argumento ou entradas os valores de t , para o intervalo de

tempo, e in , que será os valores de x_i, y_i, z_i , que são as condições iniciais, além de α, β, a e b , que são os parâmetros apresentados na equação (39). Essas entradas são tratadas respectivamente como $in(1), in(2), in(3), in(4), in(5), in(6)$ e $in(7)$, sendo o número referente à ordem que esses valores serão colocados no argumento da função, como pode ser observado no *Script 2* onde é chamada a função `ode45` para se obter a solução do sistema de equação do *Script 1*, ou seja, o `sist_chua`. Uma exceção é o *Script 6* que não utiliza o sistema do *Script 1*, porém o do *Script 1.1*, neste *Script* é alterado apenas a entrada que será inserida na função, neste caso a entrada será apenas o valor de R , resistência do Resistor R presente no circuito de Chua apresentado na Figura 5, pois os demais parâmetros já terão os valores determinados pelos valores dos componentes do circuito de Chua, Tabela 2.

Script 1.1 - Implementação de função definindo o sistema de equações (40), no qual a entrada da função será apenas R e t :

```
function saida= Sistema_eq_R(t, in)
saida=zeros(4,1);
R=in(4);
saida(1)=10*(-in(1)+in(2)-(R*(1/22000-1/3300)*in(1)+0.5*(R*(-1/2200-1/3300)-(R*(1/22000-1/3300)))*(abs(in(1)+1)-abs(in(1)-1))));
saida(2)=in(1)-in(2)+in(3);
saida(3)=-in(2)*(R*R*100*10^(-9))/(18*10^(-3));
```

No *Script 2* é apresentado a implementação para obtenção da solução das equações (40) com duas condições iniciais diferentes, sendo a diferença igual a 10^{-4} , este pequeno valor foi escolhido arbitrariamente para mostrar a sensibilidade do sistema a pequenas mudanças. O objetivo desta implementação é observar as consequências dessa sensibilidade para evolução do sistema no domínio do tempo.

Script 2 - Implementação para encontrar a solução do sistema, equação (40), utilizando duas condições iniciais diferentes :

```
clear
clc
t=100;
xi=0.7;
yi=0;
zi=0;
r1=22000;
r2=22000;
r3=2200;
r4=220;
r5=220;
r6=3300;
c2=100*10^(-9);
c1=10*power(10,(-9));
L=18*power(10,-3);
m1=-(-1/r1 + r5/(r4*r6));
m0=-(r2/(r1*r3) + r5/(r4*r6));
m2=1/r1+1/r4;
alpha=c2/c1;
R=1600
a=R*m1;
```

```

b=R*m0;
c=R*m2;
beta=c2*power(R,2)/L;
[T,Y]=ode45(@sist_chua,[0:0.001:t],[xi yi zi alpha beta a b]);
[T1,Y1]=ode45(@sist_chua,[0:0.001:t],[(xi+1/10000) yi zi alpha beta a b]);

figure(1)
plot(T,Y(:,1),T1,Y1(:,1))
title(['Figure para Resistencia ',num2str(R),'.'])
xlabel('Tempo')
ylabel('Amplitude')
legend('c.i: 0.7','c.i: 0.7+10^{-4}')

```

No *Script 2*, os valores de m_0 , m_1 e m_2 estão definidos nas equações (22), (26) e (31). Os Valores de r são os valores das resistências do circuito do diodo de Chua, apresentado na Figura 6. Os valores de α , β , a e b são os valores apresentados na equação (39). E x_i , y_i e z_i são as condições iniciais do sistema, foram determinados a partir de valores apresentados no trabalho de VALERIO, 2014.

A figura gerada pela execução do *Script 2* será apresentado no Capítulo 03, Figura 20.

O retorno da função `ode45` é guardado em T e Y . Onde T são os valores de tempo para os quais foi encontrado os valores de x , y e z que ficam armazenados na variável Y , onde a primeira coluna são os valores correspondentes à variável x , a segunda à variável y e a terceira à variável z .

Para realizar análise do comportamento do sistema, equação (40), com a variação dos parâmetro α e R utilizou-se a implementação mostrada nos *Scripts 3* e *4*. Sendo que no *Script 3* é mostrada a implementação para a variação de α e no *Script 4* para a variação em R . O parâmetro R não aparece explícito na equação (40), porém está incluso nos parâmetros β e $f(x)$, apresentados nas equações (39) e (41), respectivamente.

Script 3 - Implementação para análise do comportamento do sistema com a variação de α :

```

clear
clc
t=30;
xi=0.7;
yi= 0;
zi= 0;

beta = 28;
a= -0.714;
b=-1.143;

%# Variando alpha #

p=1;
aux=9:0.2:15;
auxt=0:0.01:t;

```

```

for alpha=aux;
g=size(aux);

[T,Y]=ode45(@sist_chua,[auxt],[-1.4 yi zi alpha beta a b]);

figure(p)
plot(T,Y(:,1))
title(['Figure para alpha ',num2str(alpha),'.'])
saveas(gcf,['XT2',num2str(p)],'png')

p=p+1;
end

```

O resultado desta implementação será apresentada no Capítulo 03, Figura 16.

Script 4 - Implementação para análise do comportamento do sistema com a variação R:

```

clear
clc
t=300;
xi=-0.7;
yi=0;
zi=0;

r1=22000;
r2=22000;
r3=2200;
r4=220;
r5=220;
r6=3300;
c2=100*10^(-9);
c1=10*power(10,(-9));
L=18*power(10,-3);
m1=-(-1/r1 + r5/(r4*r6));
m0=-(r2/(r1*r3) + r5/(r4*r6));
m2=1/r1+1/r4;
alpha=c2/c1;

%# Variando R #

p=1;
aux=0:100:1600;
g=size(aux);
RESISTENCIA=zeros(g(2),1);

imag1=1;
imag2=2;
imag3=3;

for R=aux;

a=R*m1;
b=R*m0;
c=R*m2;

```

```

beta=c2*power(R,2)/L;

[T,Y]=ode45(@sist_chua,[0:0.001:t],[xi yi zi alpha beta a b]);

%Grafico
figure(imag3)
plot(T,Y(:,1))
title(['Figure para Resistencia ',num2str(R),'.'])
saveas(gcf,['imagemTX',num2str(p),'-',date],'png')

p=p+1;

end

```

Resultado desta implementação, *Script 4*, para $R = 1600$ será apresentado no Capítulo 03, Figura 18. O valor da resistência de 1600 para R foi definido a partir de teste de vários valores para os quais o comportamento caótico poderiam aparecer e foi entorno do valor de 1600 que o comportamento caótico ficou evidente, tanto na simulação numérica quanto no circuito montado para o experimento.

No *Script 5* é apresentada a implementação utilizada para se obter o espectro de potência, obtido a partir da *fft*, transformada rápida de Fourier, da autocorrelação do sinal, feito pela função *xcorr*. As imagens geradas pela implementação são mostradas no Capítulo 3 na Figura 19. Apenas a *subfigura h* apresenta o eixo das ordenadas em escala Logarítmica conforme consta no *Script 4*.

Script 5 - Implementação para obtenção do espectro de potência do sinal:

```

clear
clc
t=10000;
xi=0.7;
yi= 0;
zi= 0;
beta = 28;
a= -0.714;
b=-1.143;

%# Variando alpha #

p=1;
h=0.1;
aux=9:0.8:15;
auxt=0:h:t;
for alpha=aux;
g=size(aux);

[T,Y]=ode45(@sist_chua,[auxt],[0.7 yi zi alpha beta a b]);

pkg load signal
[x, t1]=xcorr(Y(:,1),'biased');
Fs=1/h;
N = length(x);
k = 0:N-1;

```

```

T = N/Fs;
freq = k/T;
X = fftn(x)/N;
cutOff = ceil(N/2);
X = X(1:cutOff);
figure(p);

semilogy(freq(1:cutOff),abs(X),'r');
title(['Figure para alpha ',num2str(alpha),'.'])
xlabel('Frequency (Hz)');
ylabel('Amplitude');
saveas(gcf,['eixo_log_',num2str(p)],'png')

p=p+1;
end

```

No *Script 6* é mostrado a implementação para se obter a seção de Poincaré que será apresentada no Capítulo 03 na Figura 21.

Script 6 - Implementação para obtenção da seção de Poincaré do sistema da equação (40):

```

clear
clc
aux=1:0.01:1000;
R=1100;
[T,Y]=ode45(@Sistema_eq_R,[aux],[0.7 0 0 R]);

c=1;
a=size(aux);

for i=1:a(2)
if i~=a(2)
if Y(i,3)*Y(i+1,3)<=0 && abs(Y(i,3)-Y(i+1,3))<0.1
j(c,1)=Y(i,1);
j(c,2)=Y(i,2);
j(c,3)=Y(i,3);
c=c+1;
end
end
end

graphics_toolkit('gnuplot')

figure(4)
plot(j(:,1),j(:,2),'*')
xlabel('x')
ylabel('y')

[x,y]=meshgrid(-5:1:5);
z=zeros(11,11);

figure(5)
plot3(Y(:,1),Y(:,2),Y(:,3))
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')

```



```
hold on
surf(x,y,z,'facecolor','red')
```

2.4 Protótipo

O desenvolvimento do protótipo do circuito de Chua iniciou com a montagem do circuito em uma *protoboard*, com utilização dos componentes apresentados na tabela 2.

Tabela 2 – Componentes do Circuito de Chua

Elemento	Descrição	Valor
A_1	Amplificador Operacional - TL082	-
A_2	Amplificador Operacional - TL082	-
C_1	Capacitor	10nF
C_2	Capacitor	100nF
R	Potênciometro	2K Ω
R_1	Resistor	3.3K Ω
R_2	Resistor	22K Ω
R_3	Resistor	22K Ω
R_4	Resistor	2.2K Ω
R_5	Resistor	220 Ω
R_6	Resistor	220 Ω

Fonte – Adptada, Kenned(1993)

O Indutor de 18mH, foi substituído por um indutor eletrônico, circuito *Gyrator*, que é composto por dois amplificadores operacionais, quatro resistores e um capacitor, tendo como principais vantagens em relação ao indutor convencional a ausência de interferência eletromagnética e a obtenção de valores de indutância que não existem comercialmente (PREBIANCA, 2014). O circuito é apresentado na Figura 10 e na tabela 3 os valores dos componentes utilizados.

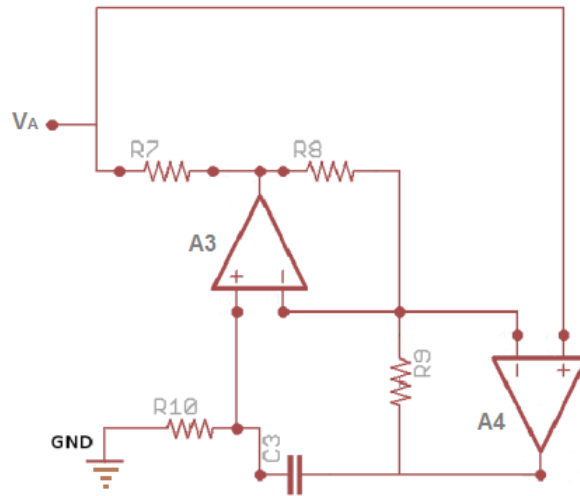
Tabela 3 – Componentes do Circuito do Indutor eletrônico

Elemento	Descrição	Valor
A_3	Amplificador Operacional - TL082	-
A_4	Amplificador Operacional - TL082	-
C_3	Capacitor	10nF
R_7	Resistor	1.8K Ω
R_8	Resistor	1K Ω
R_9	Resistor	1K Ω
R_{10}	Resistor	1K Ω

Fonte – Próprio autor

A fórmula para se encontrar a indutância equivalente do circuito é demonstrada

Figura 10 – Indutor eletrônico



Fonte – Adaptado de apud PREBIANCA, 2014

por Honório (2010) e apresentada a seguir:

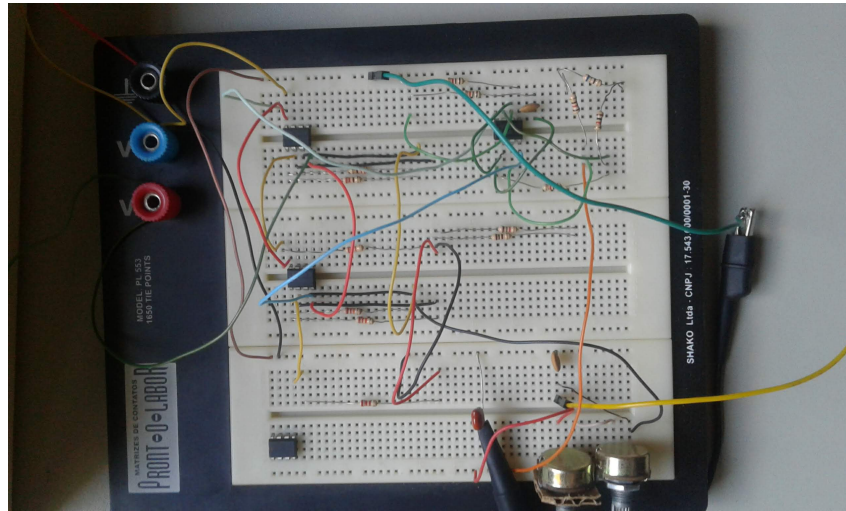
$$L_{eq} = \frac{C_3 R_7 R_9 R_{10}}{R_8} \quad (42)$$

O resultado da montagem na *protoboard* é mostrado na Figura 11. A PCI (Placa de circuito impresso) confeccionada, Figura 13, contém além do circuito de Chua com indutor eletrônico um circuito para comprimir a amplitude do sinal e deslocá-lo para oscilar apenas em níveis de tensão positiva, possibilitando a aquisição de dados por dispositivos que realizam aquisição de $0V_{cc}$ até $3.3V_{cc}$, como por exemplo o ESP32 DevKit V1, placa de desenvolvimento para prototipagem eletrônica fabricado pela empresa DOIT (*Doctors of Intelligence & Technology*), apresentado junto com o esquema na Figura 14. O ESP32 DevKit V1 é sugerido para essa amostragem por ser uma placa de desenvolvimento de baixo custo e possuir memória interna superior à memória do Arduino, outra placa de desenvolvimento para prototipagem eletrônica de código aberto, que devido a essa pequena memória não conseguiu realizar a transferência de todos os dados de amostras ao computador conectado a ele.

O esquema da Figura 14 conta com uma fonte simétrica composta pelos reguladores de tensão CC, 7805 e 7905, sendo o 7805 com saída de $+5V_{cc}$ e o 7905 com saída de $-5V_{cc}$, porém eles não estão na PCI, pois o 7905 apresentou oscilações indesejadas na sua saída, então optou-se por retirá-los do circuito e utilizar para a alimentação do circuito a tensão direta das baterias arranjadas conforme o esquema apresentado na Figura 12 para se obter uma fonte simétrica de tensão. O esquema do circuito planejado para montar a PCI está apresentado nas Figuras 14 e 15. Os esquemas eletrônicos foram montados a partir do *EasyEDA*, simulador gratuito de circuitos On-line que facilita a criação e simulação de

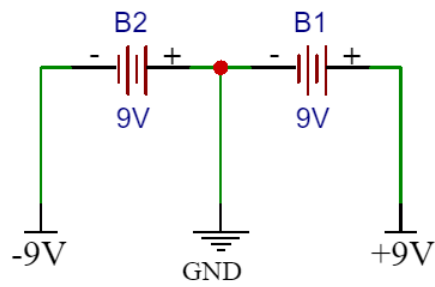
circuitos eletrônicos.

Figura 11 – Circuito de Chua na *Protoboard*



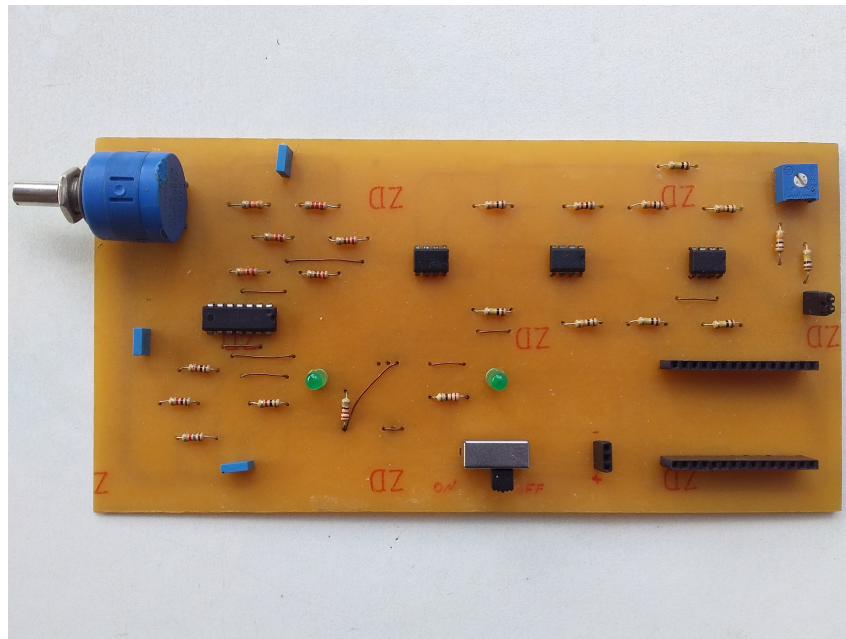
Fonte – Próprio Autor

Figura 12 – Fonte simétrica



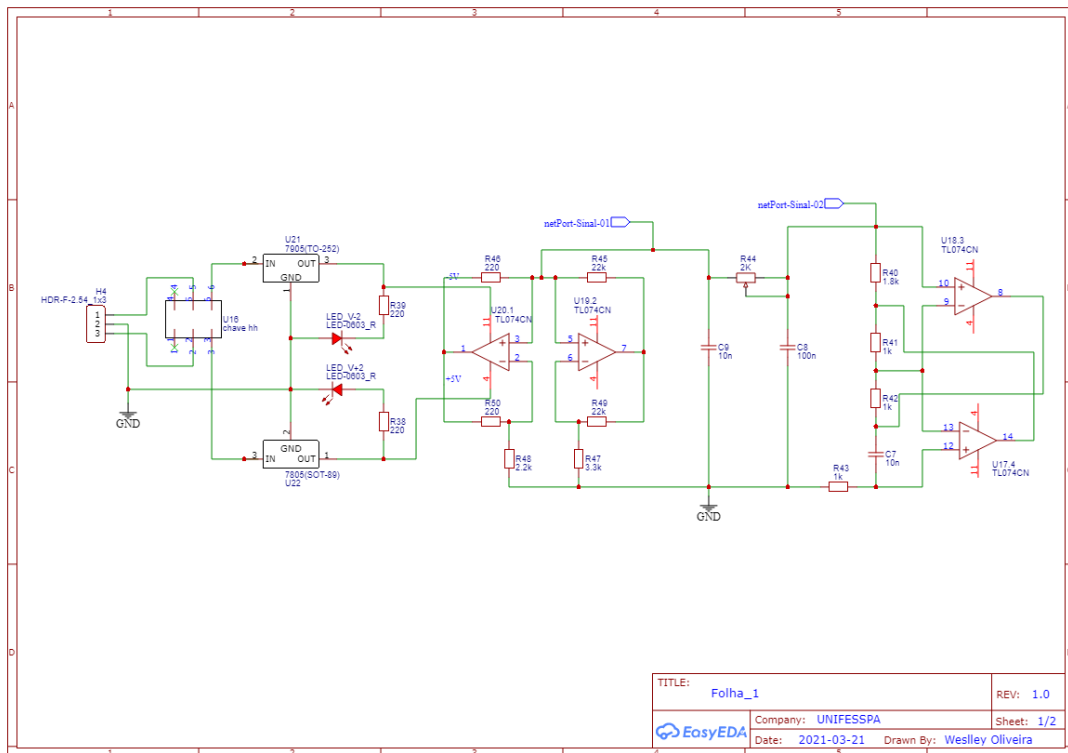
Fonte – Próprio Autor

Figura 13 – PCI com o circuito de Chua



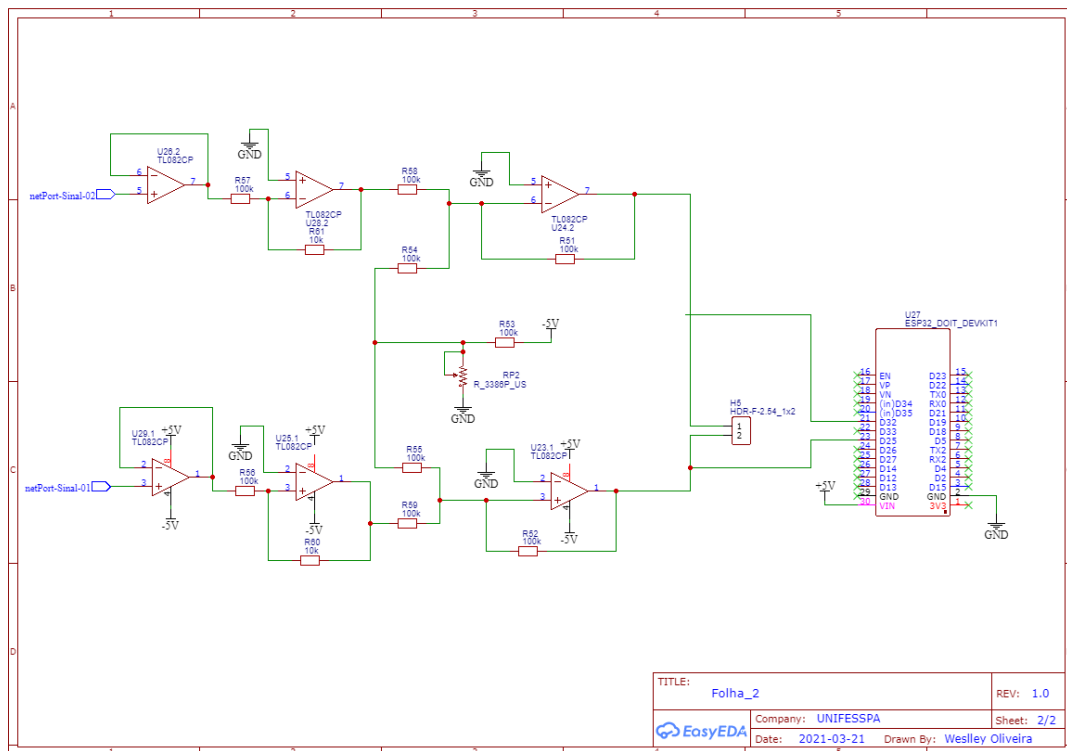
Fonte – Próprio Autor

Figura 14 – Esquema do circuito de Chua com fonte e com o indutor eletrônico.



Fonte – Próprio Autor

Figura 15 – esquema do circuito de compressão e deslocamento do sinal



Fonte – Próprio Autor

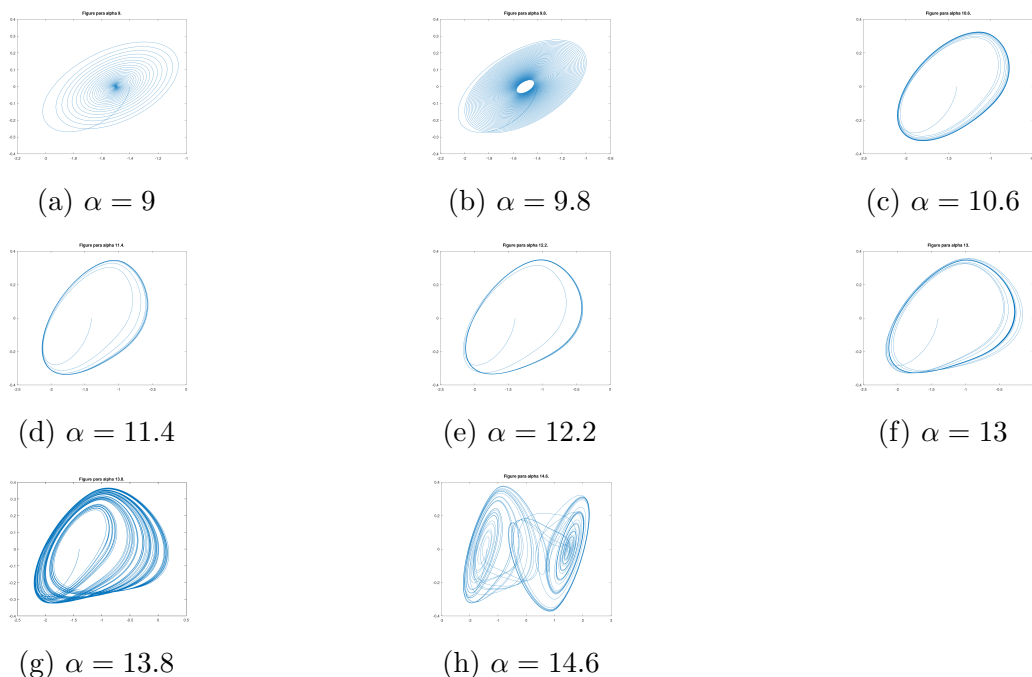
3 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Os resultados aqui apresentados são das análises do modelo matemático do circuito, das implementações em *software* e do circuito montado na PCI. As análises no *software* foram feitas por meio do modelo matemático utilizando o Octave e o Matlab para solução do sistema de equações. Os da PCI foram obtidos por meio da medição das tensões sobre os capacitores C1 e C2 (Figura 5) realizadas com utilização de um osciloscópio.

Um das condições para que um sistema dinâmico de tempo contínuo tenha comportamento caótico é que ele seja não linear e que possua no mínimo três dimensões, como informado na fundamentação teórica deste trabalho. Essas condições são atendidas pelo circuito de Chua em razão de ser composto pelo diodo de Chua, que é um componente não linear por partes (Figura 9), e ter três componentes armazenadores de energia que conferem a ele a característica de ser um sistema de terceira ordem (PREBIANCA, 2014), ou seja, possuí três graus de liberdade.

Com a variação de alguns parâmetros do circuito foi possível observar a variedade de comportamento dinâmico presente no sistema. Os parâmetros modificados foram os valores de α (Alpha) e de R , que são respectivamente a razão entre os valores das capacitâncias dos capacitores C1 e C2, e R a resistência de acoplamento entre o componente não linear, diodo de Chua, e o circuito oscilador, circuito tanque. Na Figura 16, obtida

Figura 16 – Comportamento do sistema no espaço de fase com a variação de alpha, plano x vs y.



através do *Script 3*, é apresentado no espaço de fase o comportamento do sistema com a variação de α . O resultado é a dinâmica do sistema passando por atratores pontuais (em a e b), periódicos, em (c), (d), (e) e (f), e chegando ao estado caótico no qual é possível observar dois atratores estranhos, em (g) e (h), um formado por um simples rolo, único rolo, e o outro o atrator de duplo rolo, em (h), que é o característico do circuito de Chua (MATSUMOTO; CHUA e KOMURO, 1985).

A escolha da variação de α foi em razão dele ser escolhido nas literaturas bases do trabalho, além de resultar na variação da dinâmica do sistema, conforme citado no paragrafo anterior, indo de atrator pontual a atrator estranho. O R foi escolhido em razão de ser esse o parâmetro variável do circuito elétrico montado.

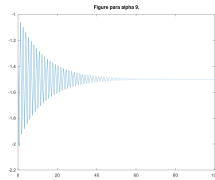
Na Figura 17 têm-se a mesma dinâmica, porém com apresentação no domínio do tempo, por ela pode-se perceber a evolução do sistema indo do caso em que a evolução tende a um ponto de equilíbrio, (a) e (b), depois tende para uma oscilação periódica, (c), (d), (e) e (f), e logo após chegando no caso aperiódico, caso em que o sistema apresenta os atratores estranhos (g) e (h). Na figura 18, obtido através do *Script 4*, é apresentado o caso da presença de caos, quando aparece o atrator de duplo rolo no espaço de fase, para as três dimensões no domínio do tempo, porém o parâmetro que foi variado, neste caso, não foi o α , mas sim o R . A evolução do circuito prático, com a variação de R , pode ser visto nas Figuras 22 e 23, nas quais é apresentado o sistema com comportamento periódico e com comportamento caótico, respectivamente.

Nas figuras 16 e 17 está representada a dinâmica para a variação de α no intervalo $[9;14,6]$ com passos de 0,8. As condições iniciais são $x_i = 0.7$, $y_i = 0$ e $z_i = 0$. Essas Figuras são resultados das implementações mostrada nos scripts 3 e 4.

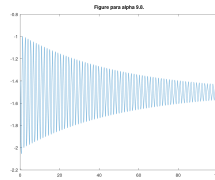
Para comprovação da presença de caos na dinâmica do sistema de Chua mostra-se na Figura 19 a densidade espectral de potência (DEP) para as mesmas condições mostradas nas Figuras 16 e 17. Para o caso (h) a implementação mostra que para atrator de duplo rolo têm-se um espectro contínuo da potência, ou seja, o sistema não é periódico. O espectro mostrado na Figura 19 é referente apenas a variável x .

Outra característica analisada foi a sensibilidade às condições iniciais do sistema. Para isso obteve-se a solução do sistema de equações para duas condições iniciais próximas, com diferença entre elas igual a 10^{-4} . Observou-se a evolução do sistema no domínio do tempo e o resultado é mostrado na Figura 20. Ele demonstra a diferença que surge entre as duas trajetórias com a pequena perturbação imposta. Outra forma de mensurar essa característica em sistemas dinâmicos é por meio do expoente de Lyapunov. No caso do circuito de Chua os valores do expoente de Lyapunov foram: 0.2337, -0.0028 e -5.9731, obtidos a partir da utilização das funções referentes ao cálculo do expoente de Lyapunov do pacote MTDS no Matlab sobre o sistema apresentado no Capítulo 2 na equação (40) que foi inserido como um novo sistema na biblioteca do pacote. O sistema apresenta em

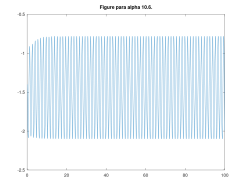
Figura 17 – Comportamento do sistema no espaço de fase com a variação de α , plano x vs t.



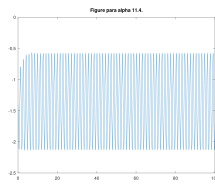
(a) $\alpha = 9$



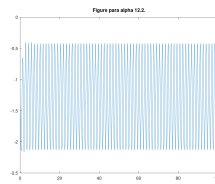
(b) $\alpha = 9.8$



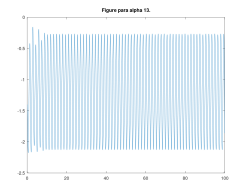
(c) $\alpha = 10.6$



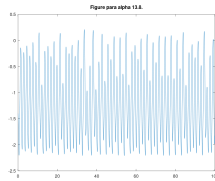
(d) $\alpha = 11.4$



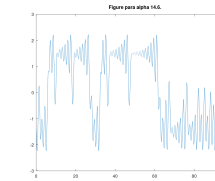
(e) $\alpha = 12.2$



(f) $\alpha = 13$



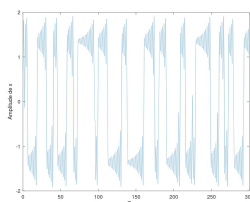
(g) $\alpha = 13.8$



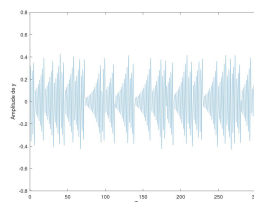
(h) $\alpha = 14.6$

Fonte – Próprio Autor

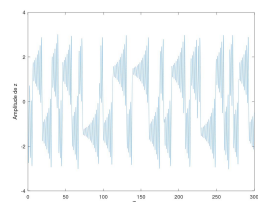
Figura 18 – Comportamento do sistema no domínio do tempo para condições caóticas - $R = 1600$, $x_i=0.7$, $y_i=0$ e $z_i=0$.



(a) Eixo x em relação ao tempo t



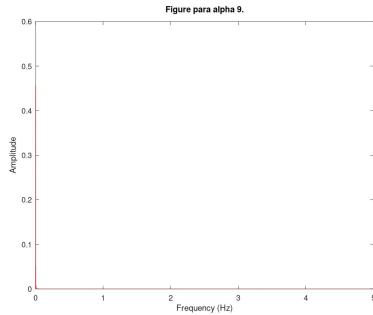
(b) Eixo y em relação ao tempo t



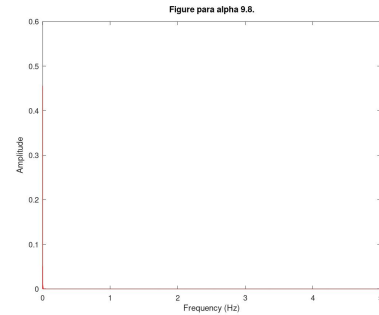
(c) Eixo z em relação ao tempo t

Fonte – Próprio Autor

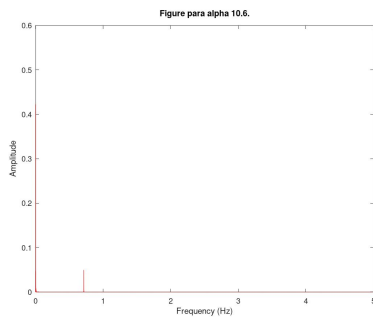
Figura 19 – Espectro de potência com a variação de α , gráficos de $|Fq(x)|$ v.s $Fq(x)$, onde $Fq(x)$ é a frequência de x .



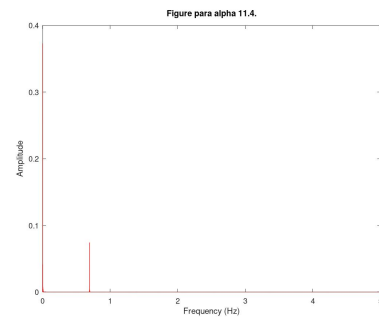
(a) $\alpha = 9$



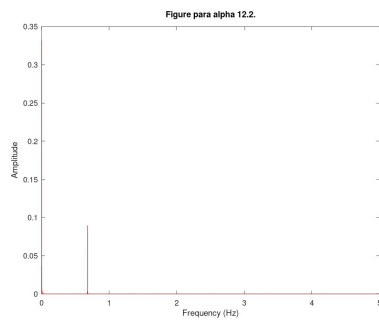
(b) $\alpha = 9.8$



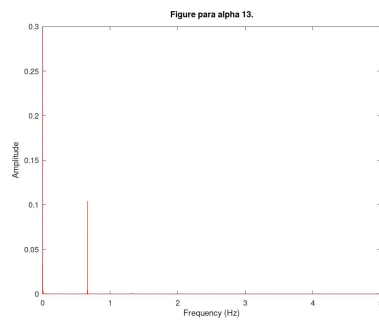
(c) $\alpha = 10.6$



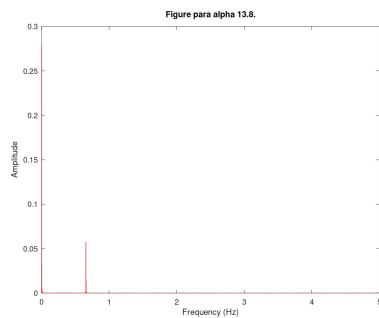
(d) $\alpha = 11.4$



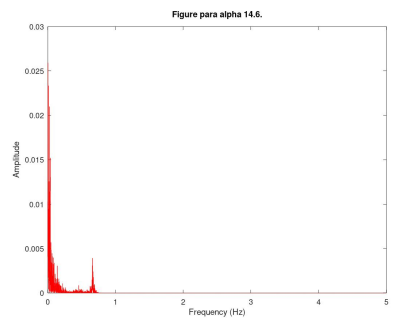
(e) $\alpha = 12.2$



(f) $\alpha = 13$



(g) $\alpha = 13.8$

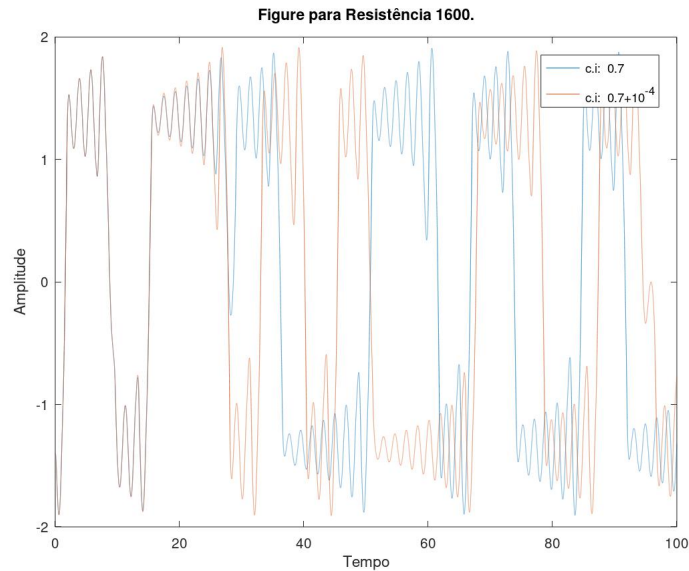


(h) $\alpha = 14.6$

Fonte – Próprio Autor

uma de suas dimensões o expoente positivo, em outra um expoente próximo a zero e na outra um expoente negativo, então, como exposto na tabela (1) a dinâmica do circuito de Chua possui mais uma característica de sistemas caóticos.

Figura 20 – Comportamento do sistema no domínio do tempo para condições caóticas com x_i diferente, sendo a amplitude a variável x

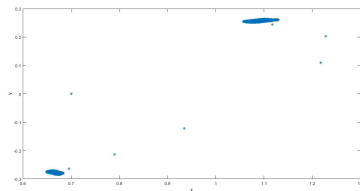


Fonte – Próprio Autor

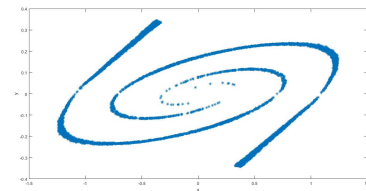
O mapa de Poincaré do circuito de Chua é apresentado na Figura 21 para duas situações. Em (a) o sistema se encontra em dinâmica periódica de período igual a dois e em (b) o sistema apresenta uma dinâmica não periódica com as trajetórias em uma certa desordem, uma característica de caos.

Os resultados obtidos a partir do circuito montado são apresentados nas Figuras 22 e 23.

Figura 21 – Mapa de Poincaré para α igual a 12, em *a*, e igual a 14.6, em *b*.



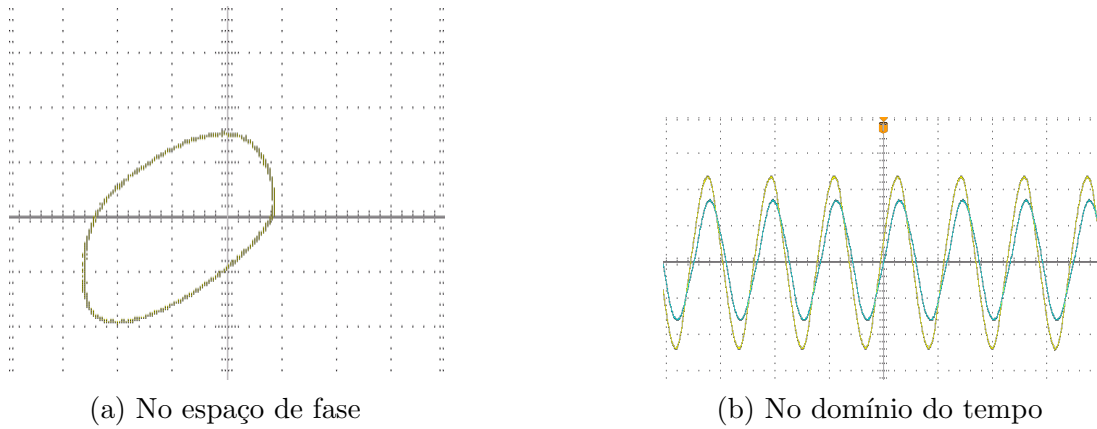
(a) $\alpha = 12$



(b) $\alpha = 14.6$

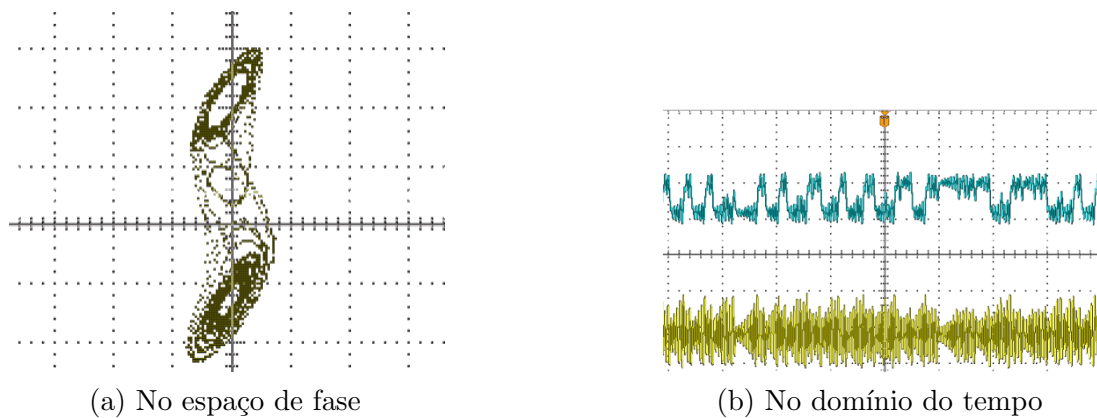
Fonte – Próprio Autor

Figura 22 – Comportamento do sistema observado pelo osciloscópio para quando não há comportamento caótico.



Fonte – Próprio Autor

Figura 23 – Comportamento do sistema observado pelo osciloscópio para quando há comportamento caótico.



Fonte – Próprio Autor

Nos resultados aqui apresentados observa-se a concordância entre os resultados da solução numérica e dos resultados práticos, além das características de um sistema caótico o que leva-se a inferir que o circuito de Chua possui dinâmica caótica para determinados valores dos parâmetros R e α , tidos como parâmetros de controle do sistema.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com os resultados obtidos da simulação numérica e do experimento realizado pode-se concluir que o circuito de Chua apresenta dinâmica complexa dadas as condições adequadas, pois os resultados dos métodos de caracterização indicaram a presença de caos no sistema.

Como sugestão de continuação deste trabalho, é recomendada a reconstrução do atrator estranho a partir dos valores experimentais do circuito montado neste trabalho. Ou seja, realizar a amostragem dos sinais gerados, exportá-los para um computador e realizar a implementação de algoritmos para a reconstrução dos atratores. Com isso demonstrar por mais este método a dinâmica caótica no circuito de Chua.

5 REFERÊNCIAS

STROGATZ, S. H. **Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering.** São Paulo: Westview Press, 1994.

KENNEDY, M. P. Three steps to chaos - part ii: A chua's circuit primer. IEEE-Instituto de Engenheiros Eletricistas e Eletrônicos, 1993. Disponível em: <<https://ieeexplore.ieee.org/document/246141>>. Acesso em: 28 fev 2019.

ANDRUCIOLI, G. L. **Caracterização experimental do sistema caótico de chua.** Monografia (Bacharelado em engenharia de controle e automação), Universidade Federal de Ouro Preto -UFOP, Minas Gerais, Brazil, 2008.

FERRARA, Nelson Fieldler; PRADO, Carmen P. Cintra do. **Caos: Uma introdução.** 1. ed. São Paulo: Blucher, 1994. 402 p. ISBN 978-85-212-0058-1.

CHARLES K, Alexander; SADIKU, Matthew N. O. **Fundamentos de circuitos elétricos** [recurso eletrônico]; tradução: José Lucimar do Nascimento – 5. ed. – Dados eletrônicos. – Porto Alegre : AMGH, 2013.

MEDRANO-T., R. O. **Caos Homoclínico no Espaço dos Parâmetros.** 177p. Tese (Doutorado em Ciências) - Instituto de Física, Universidade de São Paulo, 2004.

VIANA JUNIOR, E. R. **Espaços de Parâmetros para um Circuito Caótico Experimental.** Dissertação (Mestrado em Física) — Departemanto de Física da Universidade Federal de Minas Gerais -UFMG, 2010.

Disponível em: <<https://repositorio.ufmg.br/handle/1843/IACO-84RQPB>>. Acesso em: 28 set 2019.

VALERIO, Luis Renato. **Dinâmica não-linear e Caos: O circuito de Chua.** 30 p. Trabalho de conclusão de curso (Licenciatura em Física) - Universidade de Alfenas (Unifal), Alfenas - MG, 2014.

HONORIO, Marcelo de S. **Estudo de oscilações não-lineares e identificação de modelos Narx utilizando o protótipo do circuito de Chua.** 87 p. Trabalho de conclusão de curso (Bacharelado em Engenharia Elétrica) - Universidade federal do Pará (UFPA), Tucuruí - PA, 2010.

MONTEIRO, Luiz H.A. **Sistemas Dinâmicos.** 2ºed. 625 pág. São Paulo: Livraria de Física.2006. Disponível em:<https://books.google.com.br/books?id=w0eYcHddMq0C&printsec=frontcover&hl=pt-BR&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false>. Acesso em: 08 set 2019.

GLEICK J. **Caos: A criação de uma nova ciência;** tradução de Waltensir Dutra. –Rio de Janeiro: Elsevier, 1989.-16º reimpressão.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações Diferenciais**; tradução de Antonio Zumpano. São Paulo: PEARSON, 2001. vol. 1.

BAPTISTA, Murilo da S. **Pertubando Sistema não-lineares, uma abordagem ao controle de caos**. Tese (Doutorado em Ciências) - Instituto de Física da Universidade de São Paulo (USP)- São Paulo. 1996.

ROCHA, Ronilson; MEDRANO-T, Rene O. *An inductor-free realization of the Chua's circuit base on eletronic analogy*, **Nonlinear Dynamics**, [S. l.], v.86, n.4, 20 ago.2008, p.389-400. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/s11071-008-9408-5#citeas>>. Acesso em: 1 dez.2019.

MATSUMOTO, T.; CHUA, Leon O.; KOMURO, Motomasa. **The Double-Scroll**. IEEE Transactions on Circuits and Systems. Vols. CAS-32, pp. 797-818, Agosto de 1985. Disponível em: <https://ieeexplore.ieee.org/document/1085791>. Aceso em: Dezembro de 2019.

FERREIRA, Maria T. **Métodos lineares e não-lineares de análise de séries temporais e suas aplicações no estudo da variabilidade da frequência cardíaca de jovens saudáveis**. Dissertação (Mestrado em Biometria) - Instituto de Biociência de Botucatu (IBB) Universidade Estadual Paulista (UNESP) - Botucatu -SP.2010.

POINCARÉ, Henri, **Ensaio Fundamentais**. Rio de Janeiro: Contraponto, 2008.

MALVINO, Albert; BATES, David J. **Eletrônica: Volume 2**. Tradução de José Lucimar do Nascimento, 7ªed. 556 pág. Porto Alegre: AMGH.2007.

HAYKIN, Simon; VEEN, Barry Van. **Sinais e sistemas**. Tradução de João Carlos Barbosa dos Santos, Porto Alegre: Bookman. 2001.

LATHI, B. P. **Sinais e Sistemas Lineares**. Tradução de Gustavo Guimarães Parma, 2ªed. Porto Alegre: Bookman. 2007.